# ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

## Série 14: Régression linéaire, théorème spectral et décomposition en valeurs singulières

**Objectifs de cette série**

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) appliquer la **méthode moindres carrées** ;

(O.2) **diagonaliser une matrice symétrique avec une base orthonormée de vecteurs propres** ;

(O.3) **calculer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice**.

**Nouveau vocabulaire dans cette série**

- erreur d'approximation
- régression linéaire
- décomposition spectrale
- décomposition en valeurs singulières

# Noyau d'exercices

## 1.1 Erreurs d'approximations et régressions linéaires

Pour le noyau : items (a), (i) et (ii) ; et (b), (i).

**Exercice 1 (Erreurs d'approximations)**
Pour chaque exemple de l'**Exercice** 7 de la **Série d'exercices** 13, calculer l'erreur $\|\mathbf{b}-A\hat{x}\|$ de l'approximation de $\mathbf{b}$ par $A\hat{\mathbf{x}}$, où $\hat{\mathbf{x}}$ est la solution de moindres carrées de $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

**Exercice 2 (Régression linéaire)**
Pour chaque ensemble de points

(a) $S_1 = \{(2,1),(5,2),(6,3),(8,3)\}$ ;

(b) $S_2 = \{(0,0),(1,1),(2,-1),(3,2),(4,0)\}$ ;

dans le plan, calculer la droite de régression linéaire respective.

## 1.2 Matrices symétriques et théorème spectral

**Exercice 3 (Diagonalisation orthogonale de matrices symétriques I)**

**Rappel de la théorie**

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser ces matrices avec une matrice orthogonale.

**Exercice 4 (Diagonalisation orthogonale de matrices symétriques II)**

**Rappel de la théorie**

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la décomposition spectrale.

## 1.3 Décomposition en valeurs singulières

Pour le noyau : item (a).

**Exercice 5 (Décomposition en valeurs singulières I)**
Déterminer une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour le noyau : items (a) et (b).

**Exercice 6 (Décomposition en valeurs singulières II)**
Déterminer une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

# Pour compléter la pratique

## 2.1 Matrices symétriques

**Exercice 7 (Matrices symétriques)**
On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et soit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que $A$ est symétrique si et seulement si $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{w})$ pour tous $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

## 2.2 Décomposition en valeurs singulières

Exercice d'examen.

**Exercice 8 (Décomposition en valeurs singulières III)**
Soit $A$ une matrice, et soient $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ deux vecteurs propres de la matrice $A^{\mathrm{T}}A$, tels que

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } A\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices $U$, $\Sigma$ et $V$ telles que $A$ possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$

**Démarche proposée (à lire si vous êtes en difficulté) :**

Exercice difficile.

**Exercice 9 (Décomposition en valeurs singulières IV)**
Calculer une décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$